LICEO POLITÉCNICO
EMA ESPINOZA CORREA
LAUTARO

PROFESORES: SRA. LESLY MUÑOZ R. - SRA. SUSANA CORTÉS L.
SR. FRANCISCO QUIJADA M. - SR. FERNANDO NAVARRO B.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

<u>NUMEROS IRRACIONALES</u> (18 al 31 de mayo)

Como ya viste en la guía anterior (guía racionales), los números RACIONALES, son **todos los que SI se pueden escribir como fracción,** aquí encontramos a los Naturales, a los Enteros, Todas las fracciones, los decimales finitos, los decimales infinitos periódicos, los decimales infinitos semi - periódicos.

¿Entonces que números son irracionales?

Los números IRRACIONALES son **todos aquellos que <u>NO</u> pueden escribirse como fracción.**

Dicho de otra forma, son los Números que su representación decimal es infinita NO periódica, o sea los números después de la coma decimal no siguen ninguna secuencia o patrón (no tienen periodo).

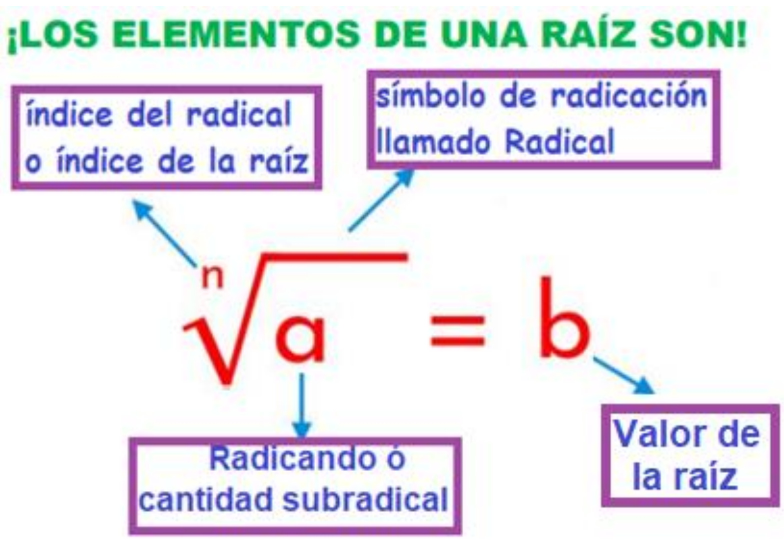
Por ejemplo: ¿La raíz cuadrada de 2 es un número racional o irracional?

Mi calculadora dice que la $\sqrt{2}$ es 1,4142135623730950488016887242097…, pero eso no es todo, de hecho sigue indefinidamente, sin que los números se repitan siguiendo un patrón.

Por lo tanto **No se puede** escribir una fracción que sea igual a la raíz de 2.

Entonces, Pregunta 1: **¿Todas las raíces cuadradas son irracionales?**

Para contestar esta pregunta, Primero debemos recordar que es una raíz cuadrada y como determinarla.



¿QUÉ ES UNA RAÍZ? ¿CÓMO DETERMINAR SU VALOR?

La raíz cuadrada de un número corresponde al número que al ser multiplicado por sí mismo da como resultado la cantidad subradical.

<u>**Ejemplos:**</u>

$\sqrt{4} = 2$	porque	$2 \cdot 2 = 4$	$\sqrt{16} = 4$	porque	$4 \cdot 4 = 16$
$\sqrt{36} = 6$	porque	$6 \cdot 6 = 36$	$\sqrt{49} = 7$	porque	$7 \cdot 7 = 49$
$\sqrt{9} = 3$	porque	$3 \cdot 3 = 9$	$\sqrt{25} = 5$	porque	$5 \cdot 5 = 25$

Si te fijas las raíces que calculamos, se llaman RAICES EXACTAS, ya que su valor es un número Entero y Natural (o sea también RACIONAL). Por lo tanto, podemos contestar a la Pregunta 1 diciendo de que **no todas** las raíces cuadradas son IRRACIONALES, ya que también hay raíces cuadradas RACIONALES.

Ahora la siguiente pregunta sería.

Pregunta 2: **¿Qué raíces son racionales y cuales son irracionales?**

Para contestar a esta pregunta usaremos la siguiente tabla y calculadora.

Raíz	**Valor de la raíz**	**Racional o Irracional**
$\sqrt{0}$	**0**	Racional y entero (es la única que no es natural ya que el cero no pertenece a los naturales)
$\sqrt{1}$	**1**	Racional, entero y Natural.
$\sqrt{2}$	1,4142135…	Irracional
$\sqrt{3}$	1,7320508…	Irracional
$\sqrt{4}$	**2**	Racional, entero y Natural.
$\sqrt{5}$	2,2360679…	Irracional
$\sqrt{6}$	2,4494897…	Irracional
$\sqrt{7}$	2,6457513…	Irracional
$\sqrt{8}$	2,8284271…	Irracional
$\sqrt{9}$	**3**	Racional, entero y Natural.
$\sqrt{10}$	3,1622776…	Irracional
$\sqrt{11}$		
$\sqrt{12}$		
$\sqrt{13}$		
$\sqrt{14}$		
$\sqrt{15}$		
$\sqrt{16}$		
$\sqrt{17}$		
$\sqrt{18}$		
$\sqrt{19}$		
$\sqrt{20}$		
$\sqrt{21}$		
$\sqrt{22}$		
$\sqrt{23}$		
$\sqrt{24}$		
$\sqrt{25}$		
$\sqrt{26}$		
$\sqrt{27}$		
$\sqrt{28}$		
$\sqrt{29}$		
$\sqrt{30}$		

Observa que los valores de $\sqrt{2}\ y\ \sqrt{3}$ se encuentra entre 1 y 2. Ya que obviamente $\sqrt{2}$ va a ser más grande que $\sqrt{1}$ y menor que $\sqrt{4}$.

Y $\sqrt{3}$ va a ser más grande que $\sqrt{2}$ y que $\sqrt{1}$ pero no más grande que $\sqrt{4}$.

Observa que los valores de $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ se encuentra entre 2 y 3. Ya que obviamente $\sqrt{5}$ va a ser más grande que $\sqrt{4}$ y menor que $\sqrt{9}$.

Y $\sqrt{8}$ va a ser más grande que $\sqrt{4}$ pero no más grande que $\sqrt{9}$.

Lo mismo pasa con $\sqrt{6}\ y\ \sqrt{7}$.

Completa la tabla e indica a que conjunto pertenecen.

Apóyate de una calculadora para hacerlo.

Entonces contestando a la pregunta 2, Las RAICES EXACTAS, corresponden al conjunto de los números RACIONALES ya que sus resultados son números naturales (excepto la de 0 que es Entero). Y las raíces INEXACTAS corresponden al Conjunto de los IRRACIONALES, ya que no siguen ningún patrón en sus decimales, por lo tanto, **nunca se podrán escribir como fracción.**

Ahora bien, Pregunta 3: **¿Existirán más números irracionales?**

Y la respuesta es **SI**. Existen números que son irracionales y son "famosos".

Numeros Irracionales Famosos.

PI es un número irracional famoso. Se han calculado más de un millón de cifras decimales y sigue sin repetirse. Los primeros son estos:

3,1415926535897932384626433832795 (y sigue...)

El número ***e*** (el Número de Euler) es otro número irracional famoso. Se han calculado muchas cifras decimales de ***e*** sin encontrar ningún patrón. Los primeros decimales son:

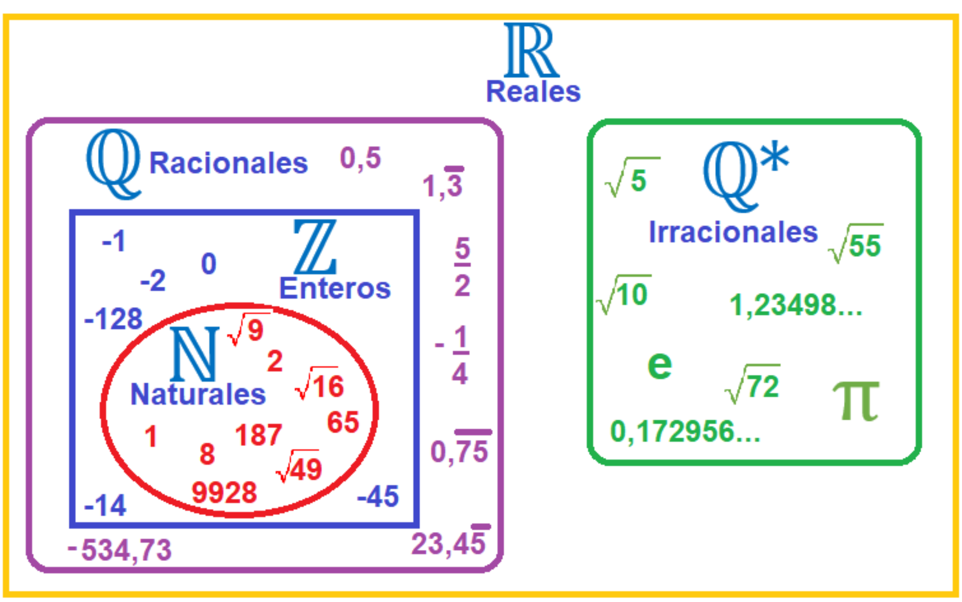
2,7182818284590452353602874713527 (y sigue...)

La Razón de Oro es un número irracional. Sus primeros dígitos son:

1,61803398874989484820... (y más...)

Y en general muchas raíces, cuadradas, cúbicas, etc. Que no son exactas y también son Irracionales.

Ahora Observa un esquema-resumen de los conjuntos numéricos que ya deberías manejar y conocer.



Observa que las raíces exactas van en los naturales (excepto el 0 que es entero). Y como los naturales están dentro de los Enteros, y los enteros son también Racionales, entonces todos esos números serán Racionales.

Las raíces inexactas van en los Irracionales, así como también las "letras" famosas y los decimales que no siguen periodos.

Por ultimo Observa que al JUNTAR los **Racionales** con los **Irracionales**, se forma el conjunto de los Números REALES, es decir, todos los números que conoces hasta el momento son **REALES.**

AHORA TE TOCA A TÍ

Actividad 1: Indica en cada caso a que conjunto **pertenece ($\in$)** y a cual **no pertenece ($\notin$)** cada número. (puede ser más de uno)

Numero	Naturales $\mathbb{N}$	Enteros $\mathbb{Z}$	Racionales $\mathbb{Q}$	Irracionales $\mathbb{Q}^*$	Reales $\mathbb{R}$
23					
$\sqrt{12}$					
1,5					
$\frac{9}{5}$					
$12,\overline{35}$					
$\sqrt{25}$					
$9,12\overline{47}$					
-12					
$\sqrt{100}$					
2,3456					
2,3456…					
$\sqrt{26}$					
$\sqrt{35}$					
$-6\frac{8}{9}$					
0					
π					
-18					
289					
$\frac{8}{3}$					
$\sqrt{49}$					
$\sqrt{69}$					
$\frac{1}{10}$					
7,82374…					
$\sqrt{81}$					
$\sqrt{120}$					
$\sqrt{15}$					
$\sqrt{64}$					
e					
$\sqrt{0}$					

¿Cómo encontrar el valor aproximado de una raíz inexacta, o sea de un irracional?

Encontrar un valor aproximado se refiere a encontrar más o menos cuánto es el valor de dicha raíz cuadrada. Para esto, realizaremos estimaciones usando las raíces cuadradas conocidas (que su valor es un número Racional). Y representaremos el valor aproximado con un decimal (lo representaremos con un dígito después de la coma).

RAICES CUADRADAS EXACTAS QUE TE TIENES QUE APRENDER

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{400}=20$
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{900}=30$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{1600}=40$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{2500}=50$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{3600}=60$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{4900}=70$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{6400}=80$
$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{225}=15$	$\sqrt{8100}=90$

Ejemplo 1: Busquemos cuánto vale aproximadamente $\sqrt{40}$

Para ello primero vemos **entre qué raíces** exactas está $\sqrt{40}$

$\sqrt{36}=6$
$\sqrt{37}$
$\sqrt{38}$
$\sqrt{39}$
$\sqrt{40}$ **Aquí está, entre** $\sqrt{36}$ **y** $\sqrt{49}$
$\sqrt{41}$
$\sqrt{42}$
$\sqrt{43}$
$\sqrt{44}$
$\sqrt{45}$
$\sqrt{46}$
$\sqrt{47}$
$\sqrt{48}$
$\sqrt{49}=7$

Matemáticamente $\sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$

Como sabemos que $\sqrt{36}$ = 6, y $\sqrt{49}$ =7 Entonces el valor de $\sqrt{40}$ será un número entre 6 y 7.

$6 < \sqrt{40} < 7$

Números entre 6 y 7.

6
6,1
6,2
6,3
6,4
6,5
6,6
6,7
6,8
6,9
7

Ahora, para saber cuál es el número que nos sirve utilizamos el tanteo, como $\sqrt{40}$ está más cerca de $\sqrt{36}$ que de $\sqrt{49}$ entonces probamos con alguno que esté más cerca de 6 que de 7.

¿Cómo probamos?, multiplicando el decimal que elijamos por sí mismo. La idea es llegar a un número lo más cercano a 40 al realizar la multiplicación. Ojo que al realizar dicha multiplicación no nos podemos pasar de 40.

6,2 • 6,2
124
+ 372 -
3844
ponemos la coma 38,44

Al usar 6,2 nos da 38,44. Probamos con el siguiente decimal.

6,3 • 6,3
189
+ 378 -
3969
ponemos la coma 39,69

Al usar 6,3 nos da 39,69. Estamos muy cerca de 40, probaremos con el siguiente para ver qué pasa.

6,4 • 6,4
256
+ 384 -
4096
ponemos la coma 40,96

Al probar con 6,4 nos da 40,96 y como no nos podemos pasar de 40, entonces nos percatamos que:

$$\sqrt{40} = 6,3$$

Ojo, el resultado es 6,3 por q recuerda que el valor era un número entre 6 y 7.

Ejemplo 2: Busquemos cuánto vale aproximadamente $\sqrt{20}$

Para ello primero vemos **entre qué raíces** exactas está $\sqrt{20}$

$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{17}$
$\sqrt{18}$
$\sqrt{19}$
$\sqrt{20}$ ⇐ **Aquí está, entre** ⇒ $\sqrt{16}$ **y** $\sqrt{25}$
$\sqrt{21}$
$\sqrt{22}$
$\sqrt{23}$
$\sqrt{24}$
$\sqrt{25} = 5$

Matemáticamente ⇒ $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$

Como sabemos que $\sqrt{16} = 4$, y $\sqrt{25} = 5$
Entonces el valor de $\sqrt{20}$ será un número entre 4 y 5.

⇒ $4 < \sqrt{20} < 5$

Números entre 4 y 5

4
4,1
4,2
4,3
4,4
4,5
4,6
4,7
4,8
4,9
5

Ahora, para saber cuál es el número que nos sirve utilizamos el tanteo, como $\sqrt{20}$ está casi en la mitad de $\sqrt{16}$ y de $\sqrt{25}$ entonces probamos con alguno que esté en la mitad de 4 y 5.

¿Cómo probamos?, multiplicando el decimal que elijamos por sí mismo. La idea es llegar a un número lo más cercano a 20 al realizar la multiplicación. Ojo que al realizar dicha multiplicación no nos podemos pasar de 20.

4,5 • 4,5
225
\+ 180-
2025
Ubicamos la coma 20,25

Al usar 4,5 nos pasamos de 20, por lo tanto, lo intentamos con el decimal anterior.

4,4 • 4,4
176
\+ 176-
1936
Ubicamos la coma 19,36

Como este resultado es menor que 20 y ya no hay otro decimal (con un decimal) más alto que probar, ya que ya lo hicimos con 4,5 entonces decimos que:

$$\sqrt{20} = 4,4$$

AHORA TE TOCA A TÍ

Actividad 2: Determina el valor aproximado (con una cifra decimal) de las siguientes raíces inexactas, incluye el desarrollo, ya que lo debes hacer sin celular.

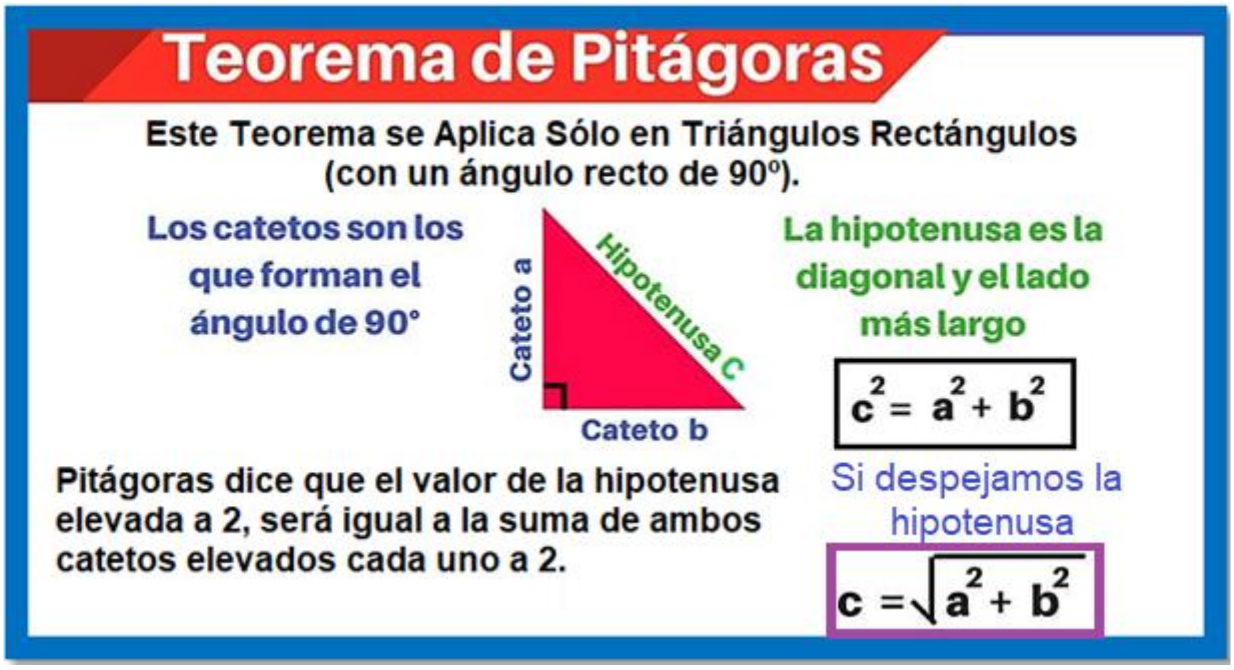
$a)\ \sqrt{8} =$ $b)\ \sqrt{85} =$ $c)\ \sqrt{53} =$ $d)\sqrt{6} =$

$e)\ \sqrt{23} =$ $f)\ \sqrt{30} =$ $g)\ \sqrt{45} =$ $h)\sqrt{70} =$

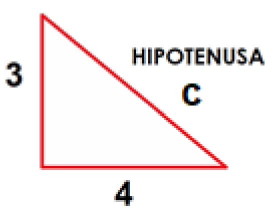
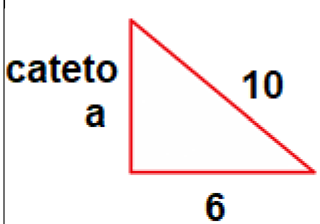
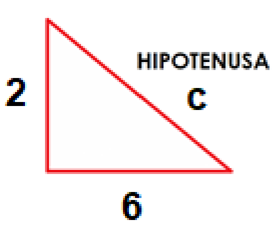
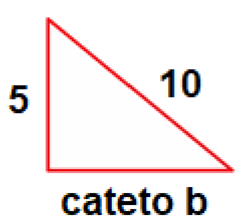
$i)\ \sqrt{90} =$ $j)\ \sqrt{110} =$ $k)\ \sqrt{10} =$ $l)\sqrt{35} =$

Ubicación de Raíces Inexactas (irracionales) en la recta numérica

La ubicación de una raíz cuadrada de la recta numérica está relacionada con el **Teorema de Pitágoras.**

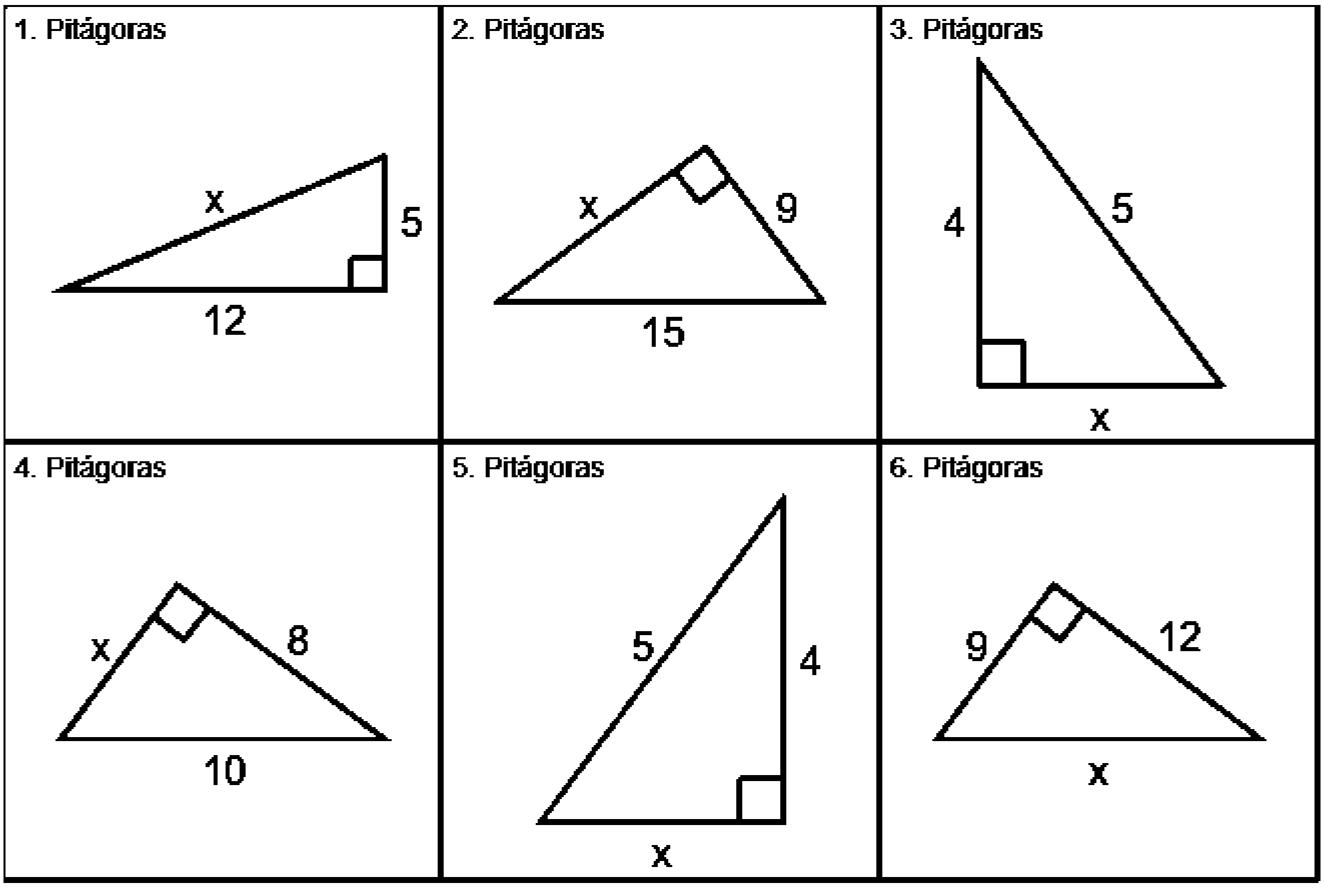


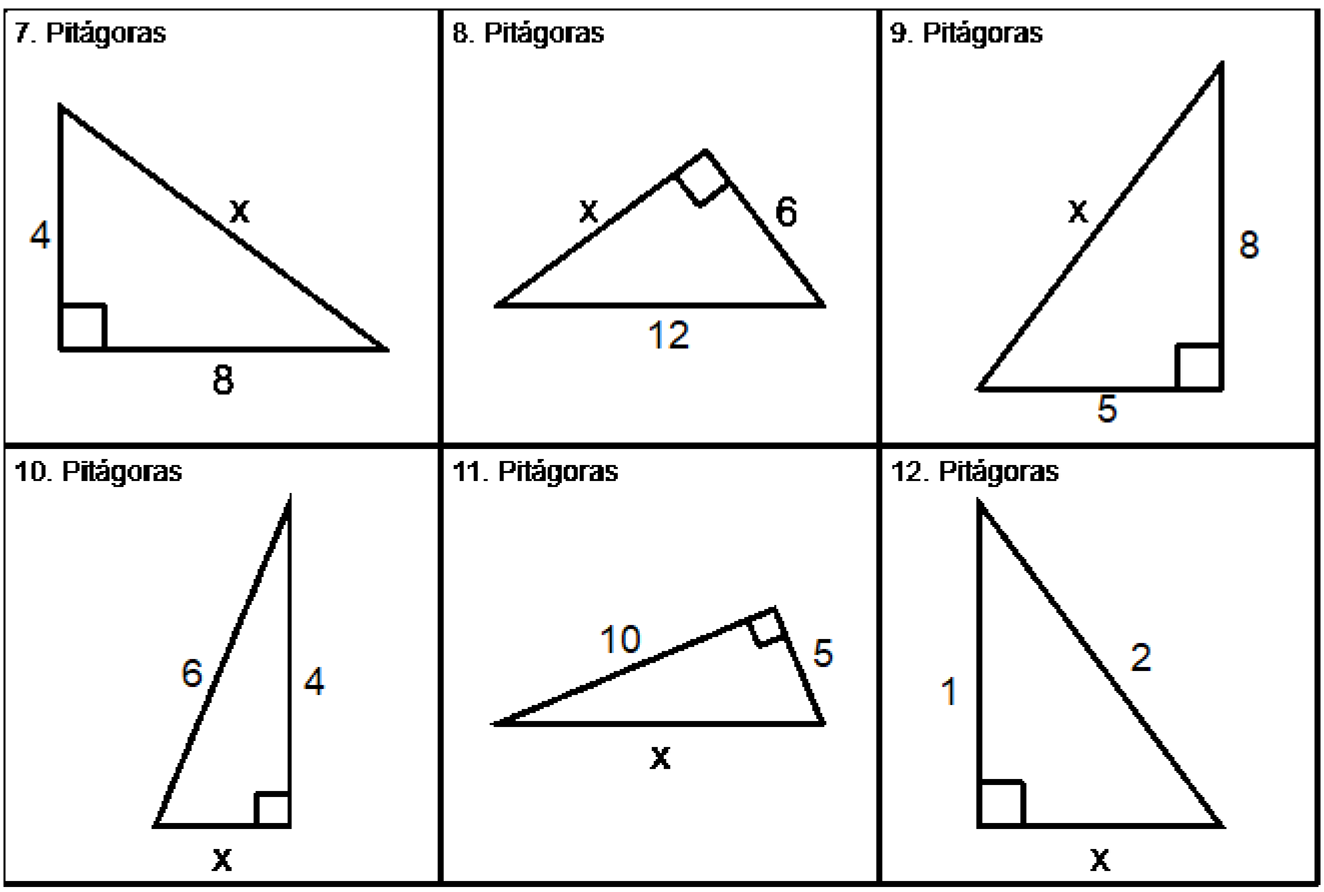
<u>Recodemos como aplicar Pitágoras.</u>

Cuando falta el valor de la Hipotenusa	**Cuando falta el valor de un cateto**
 $c^2 = 3^2 + 4^2$ $c^2 = 3 \bullet 3 + 4 \bullet 4$ $c^2 = 9 + 16$ $c^2 = 25$ / aplicamos raíz $\sqrt{c^2} = \sqrt{25}$ (en el lado izquierdo se cancela la raíz con el elevado a 2) (en el lado derecho sacamos la raíz cuadrada de 25 si es que es posible, en este caso si lo es por lo tanto) $c = 5$ La Hipotenusa Mide 5.	 $10^2 = a^2 + 6^2$ $10 \bullet 10 = a^2 + 6 \bullet 6$ $100 = a^2 + 36$ Despejamos "a" $100 - 36 = a^2$ $64 = a^2$ aplicamos raíz / $\sqrt{64} = \sqrt{a^2}$ (en el lado derecho se cancela la raíz con el elevado a 2) (en el lado izquierdo sacamos la raíz cuadrada de 64 si es que es posible, en este caso si lo es por lo tanto) $8 = a$ El cateto Mide 8.
 $c^2 = 2^2 + 6^2$ $c^2 = 2 \bullet 2 + 6 \bullet 6$ $c^2 = 4 + 36$ $c^2 = 40$ / aplicamos raíz $\sqrt{c^2} = \sqrt{40}$ (en el lado izquierdo se cancela la raíz con el elevado a 2) (en el lado derecho sacamos la raíz cuadrada de 40 si es que es posible, en este caso es una raíz inexacta por lo tanto dejamos el lado derecho igual) $c = \sqrt{40}$ La hipotenusa Mide $\sqrt{40}$.	 $10^2 = 5^2 + b^2$ $10 \bullet 10 = 5 \bullet 5 + b^2$ $100 = 25 + b^2$ Despejamos "b" $100 - 25 = b^2$ $75 = b^2$ aplicamos raíz / $\sqrt{75} = \sqrt{b^2}$ (en el lado derecho se cancela la raíz con el elevado a 2) (en el lado izquierdo sacamos la raíz cuadrada de 75 si es que es posible, en este caso como 75 no tiene raíz exacta lo dejamos tan cual) $\sqrt{75} = b$ El cateto Mide $\sqrt{75}$.

AHORA TE TOCA A TÍ

Actividad 3: Determina la medida faltante en cada triángulo rectángulo usando el Teorema de Pitágoras.





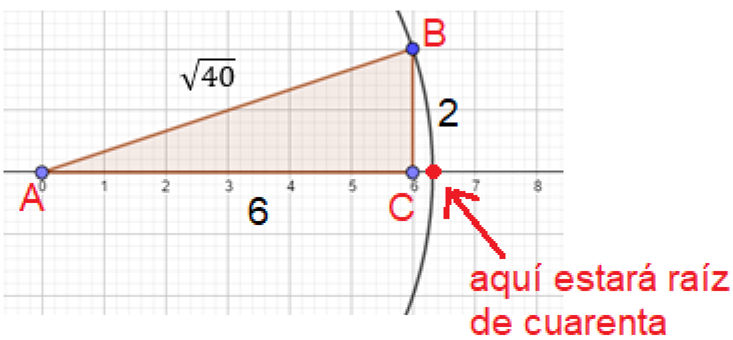
AHORA, YA QUE RECORDAMOS PITÁGORAS, VAMOS A LO QUE NOS IMPORTA, “UBICAR RAICES INEXACTAS EN LA RECTA NUMÉRICA”.

LA UBICACIÓN DE UNA RAÍZ CUADRADA IRRACIONAL SE RELACIONA CON LA LONGITUD DE LA HIPOTENUSA DE PITÁGORAS.

Para la Ubicación usaremos esta forma de Pitágoras, con la hipotenusa ya despejada.

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Por Ejemplo, Si queremos ubicar $\sqrt{40}$, armamos un triángulo cuya Hipotenusa sea $\sqrt{40}$. Una opción de triángulo que cumpla con esto es uno que tenga catetos 6 y 2 (en ejemplos anteriores sale dicho triángulo).



Lo que nos importa es **ubicar el número irracional $\sqrt{40}$** (siempre ubicaremos la hipotenusa), **sobre la recta numérica**, como aquí conocemos los lados, entonces simplemente, dibujamos nuestro triángulo en la recta respetando las medidas de los catetos, y trazamos con un compás un arco de circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$, el punto donde cae dicho arco sobre la recta numérica es el lugar donde se ubica $\sqrt{40}$.

Pero, ¿Qué pasa si no tenemos los lados del triángulo?

Aquí es donde debes usar todo tu poder y pensar en Pitágoras y la **fórmula despejada de la hipotenusa,** para poder encontrar los catetos y dibujar el triángulo.

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ubiquemos en la recta $\sqrt{13}$

Como no tenemos los lados, debemos seguir los siguientes pasos

1º **pensar en una suma,** ¿Qué números nos dan 13? Tenemos varias opciones, pero la que nos servirá es aquella que contiene **números que podamos escribirlos como cuadrados perfectos**, o sea 9 + 4, (porque 9 como cuadrado perfecto es 3^2; y 4 como cuadrado perfecto se escribe 2^2, Fíjate que mantienen su valor)

1 $\sqrt{13} = \sqrt{9+4}$

2 $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$

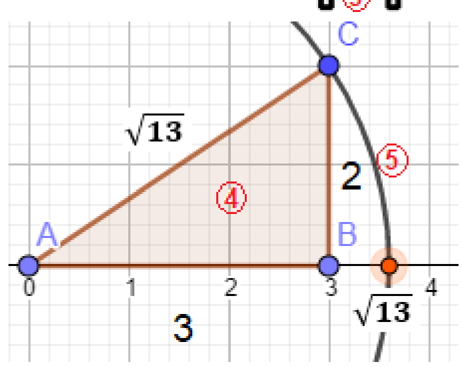
3

2º escribimos usando nuestra fórmula de hipotenusa despejada.

3º ya tenemos nuestros lados o catetos del triángulo, 3 y 2

4º ahora podemos dibujar nuestro triángulo en la recta, con lados 3 y 2 e hipotenusa $\sqrt{13}$.

5º trazamos con un compás un arco con centro en A y radio $\overline{AC}$, el punto donde el arco toca a la recta, es la ubicación exacta de $\sqrt{13}$.



AHORA TE TOCA A TÍ

Actividad 4: Ubica en una recta numérica las siguientes raíces inexactas.

$a)\ \sqrt{20}$ $b)\ \sqrt{17}$ $c)\ \sqrt{32}$ $d)\ \sqrt{29}$ $e)\ \sqrt{37}$ $f)\ \sqrt{45}$

Desafío ubica $\sqrt{3}$.

Descomposición de raíces.

Muchas veces para poder realizar ejercicios de operatoria con raíces que mezclan racionales con irracionales, es necesario aprender a descomponer dichas raíces según sus factores primos, para así transformarlas en una expresión equivalente, pero con cantidad subradical más pequeña, en otras palabras, es como sacar una parte de la cantidad subradical hacia afuera de la raíz.

Ojo no todas las raíces se pueden transformar en una expresión equivalente.

Recordemos que los **números primos** son **todos aquellos que <u>solamente</u> pueden dividirse por 1 y por sí mismos.**

miremos si 7 es primo	miremos si 9 es primo
7 : 1 = 7 se puede por 1	9 : 1 = 9 se puede por 1
7 : 7 = 1 se puede por si mismo	9 : 9 = 1 se puede por si mismo
y no se puede dividir por ningún otro número en forma exacta, por lo tanto "7 es primo"	9 : 3 = 3 se puede además por 3. por lo tanto "9 no es primo"

Entonces los Números primos son = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29…}

<u>Descomponiendo una raíz cuadrada</u>

Para descomponer una raíz a su forma más simple se deben seguir los siguientes pasos.

$$\sqrt{18}$$

1º Dividimos por factores primos

18	: 2
9	: 3
3	: 3
1	

$$\sqrt{18} = \sqrt{3 \bullet 3 \bullet 2}$$

2º Escribimos la multiplicacion de los factores encontrados.

$$= \sqrt{3^2 \bullet 2}$$

3º Escribimos como potencia lo que se puede.

$$= \sqrt[\cancel{2}]{3^{\cancel{2}}} \bullet \sqrt{2}$$

4º Separamos las raíces.

$$= 3\sqrt{2}$$

5º Mismo índice con mismo exponente se cancelan.

entonces

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{20}$$

1º Dividimos por factores primos

20	: 2
10	: 2
5	: 5
1	

$$\sqrt{20} = \sqrt{2 \bullet 2 \bullet 5}$$

2º Escribimos la multiplicacion de los factores encontrados.

$$= \sqrt{2^2 \bullet 5}$$

3º Escribimos como potencia lo que se puede.

$$= \sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}} \bullet \sqrt{5}$$

4º Separamos las raíces.

$$= 2\sqrt{5}$$

5º Mismo índice con mismo exponente se cancelan.

entonces

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{48}$$

1º Dividimos por factores primos

48	: 2
24	: 2
12	: 2
6	: 2
3	: 3
1	

$$\sqrt{48} = \sqrt{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3}$$
$$= \sqrt{2^2 \bullet 2^2 \bullet 3}$$
$$= \sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}} \bullet \sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}} \bullet \sqrt{3}$$
$$= 2 \bullet 2 \bullet \sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

entonces

$$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

2º Escribimos la multiplicacion de los factores encontrados.

3º Escribimos como potencia lo que se puede.

4º Separamos las raíces.

5º Mismo índice con mismo exponente se cancelan.

6º Multiplicamos todos los números que salieron de las raíces

$$\sqrt{30}$$

1º Dividimos por factores primos

30	: 2
15	: 3
5	: 5
1	

$$\sqrt{30} = \sqrt{2 \bullet 3 \bullet 5}$$

2º Escribimos la multiplicacion de los factores encontrados.

3º No se puede escribir como potencia porque ningun factor se repite, por lo tanto, NO SE PUEDE TRANSFORMAR.

AHORA TE TOCA A TÍ

Actividad 5: Descompone las siguientes raíces.

$a)\ \sqrt{28}$ $b)\ \sqrt{12}$ $c)\ \sqrt{50}$ $d)\ \sqrt{98}$ $e)\ \sqrt{72}$ $f)\ \sqrt{60}$

$g)\ \sqrt{45}$ $h)\ \sqrt{80}$ $i)\ \sqrt{125}$ $j)\ \sqrt{8}$ $k)\ \sqrt{27}$ $l)\ \sqrt{40}$

Desafió 1: descompone

$a)\ \sqrt{100}$ $b)\ \sqrt{64}$ $c)\ \sqrt{400}$ $d)\ \sqrt{25}$ $e)\ \sqrt{900}$ $f)\ \sqrt{144}$

Desafío 2: COMPONE (Componer, es el proceso inverso de descomponer, o sea ahora hay que introducir todos los números adentro de la raíz) ingéniatelas para lograr componer lo siguiente.

$a)\ 3\sqrt{7}$ $b)\ 2\sqrt{11}$ $c)\ 4\sqrt{7}$ $d)\ 5\sqrt{3}$ $e)\ 8\sqrt{2}$ $f)\ 12\sqrt{3}$