LICEO POLITÉCNICO
EMA ESPINOZA CORREA
LAUTARO

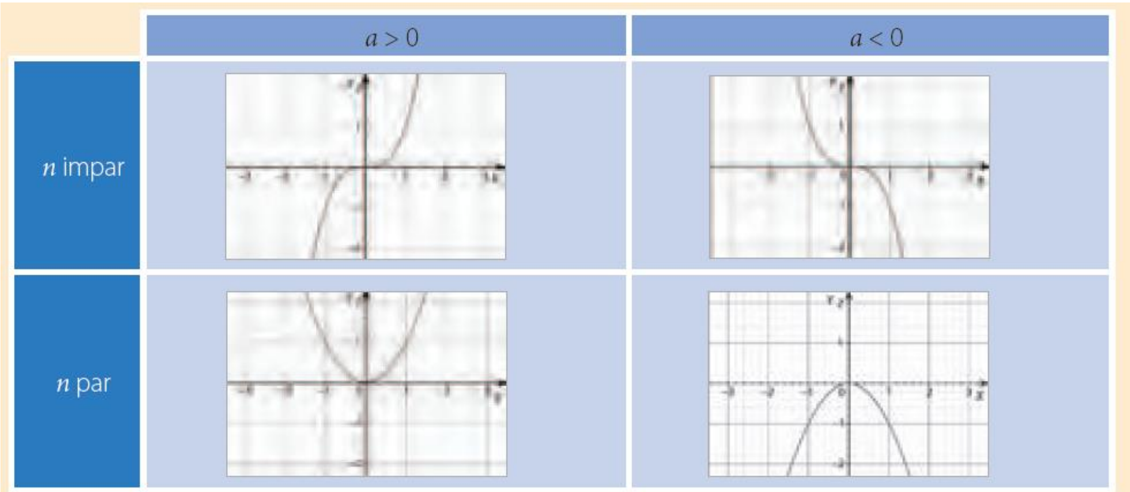
Guía Auto Aprendizaje 2 4º Medio (18/05/2020 al 29/05/2020)

Nombre: ____ **Curso**: ___________

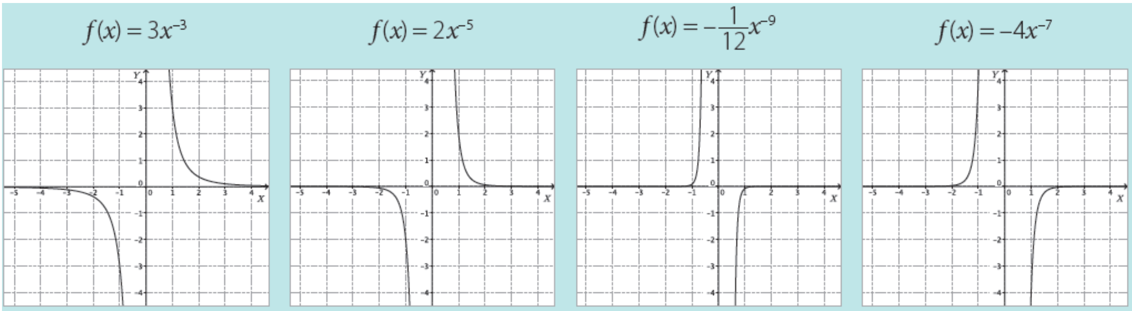
Objetivo: OA 01:Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia f(x) = a · x^zcon |z| < 3.
Indicador 01.3: Determinan simetrías y asíntotas de los gráficos. Resuelven problemas matemáticos, de ciencias naturales o de economía, mediante funciones potencia.

Recordando lo visto en la guía anterior:

- Una función potencia es una función de la forma $f(x) = ax^n$, donde a y n son números reales, distintos de cero.
- El dominio de una función potencia $f(x) = ax^n$, con n entero positivo, es R.
- La gráfica de la función $f(x) = ax^n$, con n entero positivo, depende de si n es par o impar y del signo de a:



Observa las siguientes funciones potencia, si n es un número impar negativo.

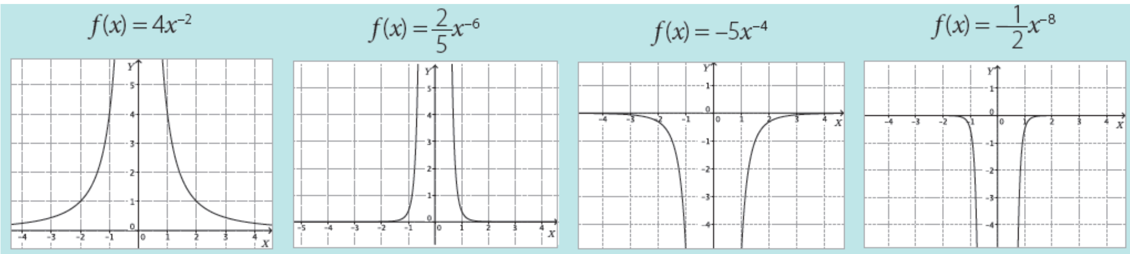


Recuerda que otra manera de representar algebraicamente las anteriores funciones es:

$\boxed{f(x) = \frac{3}{x^3}}$ $\boxed{f(x) = \frac{2}{x^5}}$ $\boxed{f(x) = -\frac{1}{12x^9}}$ $\boxed{f(x) = -\frac{4}{x^7}}$

A partir de las gráficas anteriores podemos observar que en todos los casos tanto el dominio de f como su recorrido es el conjunto de todos los números reales menos el cero. Es decir, $dom\ f = rec\ f = R - \{0\}$. ¿Por qué no puede ser el 0?, pues recuerda que: $\boldsymbol{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$**,** por ende x jamás puede tomar el valor 0, ya que tendríamos una fracción con denominador igual a 0, lo cual esta indefinido. En este caso, los ejes X e Y son asíntotas de la función.

Además, cuando $a > 0\ (un\ numero\ positivo)$ la función es decreciente y se encuentra en el primer y tercer cuadrante, mientras que si $a < 0\ (un\ numero\ negativo)$, la función es creciente y se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante. Finalmente, observa las siguientes gráficas que representan funciones potencia cuando el exponente n es un número negativo par.



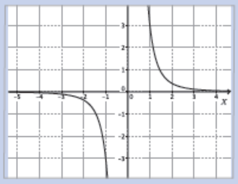
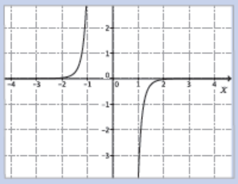
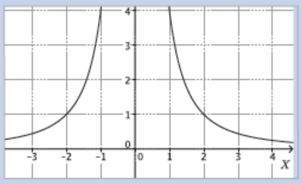
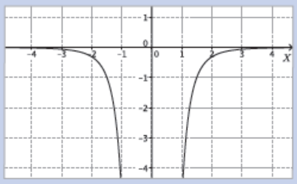
Si te fijas en las gráficas anteriores, podemos verificar que cuando n es un numero par negativo, el dominio de la función potencia son los números reales diferentes de 0, o sea, $dom\ f = R - \{0\}$. Sin embargo, el recorrido de f , depende del signo de a:

Cuando $a > 0\ (positivo)$ los valores que puede tomar la función son todos los números reales positivos. Es decir, $rec\ f = R^{+}$. En este caso, la función es creciente para los valores negativos de x y decreciente para los valores positivos de x. Por último, la función tiene dos asíntotas: en $x = 0$ e $y = 0$, o sea, los ejes Y y X, respectivamente.

En el caso de que $a < 0\ (negativo)$, el recorrido de la función potencia son todos los números reales negativos, es decir, $rec\ f = R^{-}$. Además, la función decrece para los valores negativos de x y es creciente para los valores positivos de x. Al igual que en el caso anterior, la función tiene dos asíntotas, las cuales son los ejes X e Y.

<u>En resumen:</u>

• En el caso de una función potencia del tipo $f(x) = ax^n$ con n entero negativo, las características de la función también dependen de si n es par o impar y del signo de a.
• El dominio de una función potencia $f(x) = ax^n$ con n entero negativo es $R - \{0\}$.

	$a > 0$	$a < 0$
n negativo impar		
n negativo par		

<u>Actividad 1</u>

Apoyándote en ambos resúmenes vistos anteriormente, identifica como es el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

A) $f(x) = x^3$
B) $f(x) = -2x^4$
C) $f(x) = 7x^8$
D) $f(x) = -\frac{1}{5}x^5$
E) $f(x) = 2x^{-3}$
F) $f(x) = -5x^{-4}$

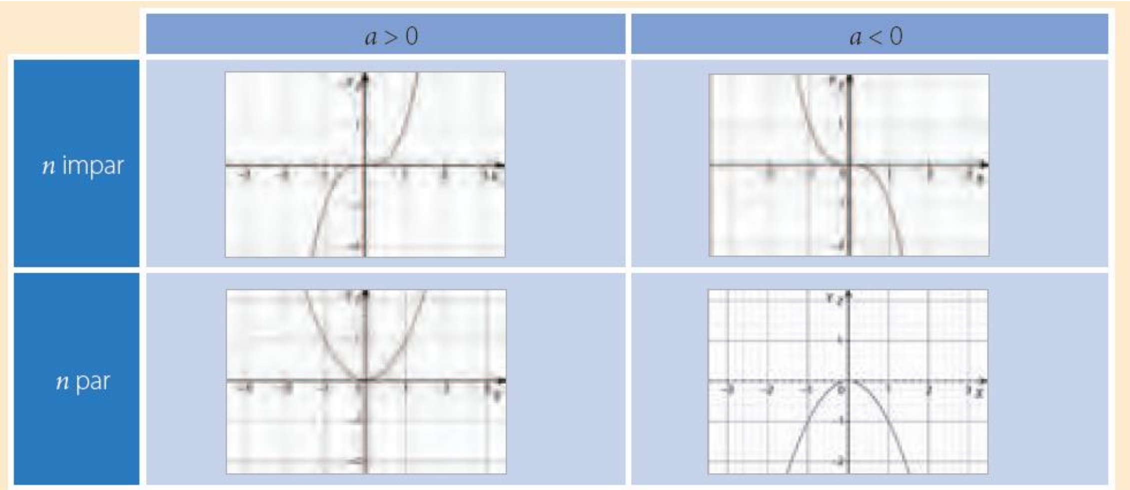
G) $f(x) = \frac{2}{3}x^{-6}$

H) $f(x) = -8x^{-11}$

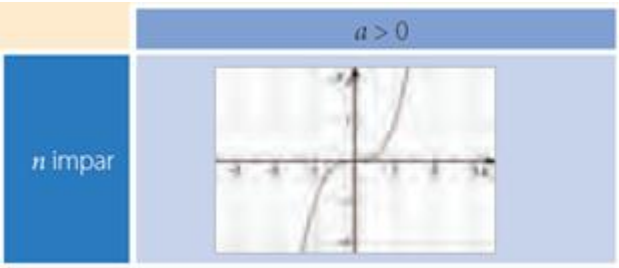
Ejemplos: identificar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

- $f(x) = 6x^3 \longrightarrow$ Primero identificamos los valores de a y n.
  $a = 6\ (positivo)$ y $n = 3\ (positivo\ e\ impar)$

  Luego observamos en el resumen correspondiente, el cual debe ser donde tengamos a $n\ positivo$:



  Posteriormente identificamos en cuál de las 4 opciones se cumplen los requisitos según nuestros valores de a y n, que en este caso sería:

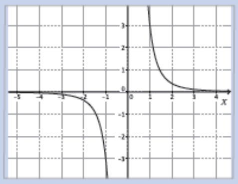
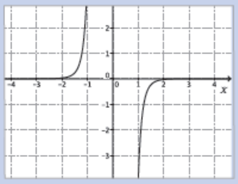
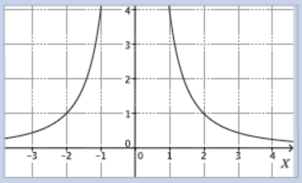
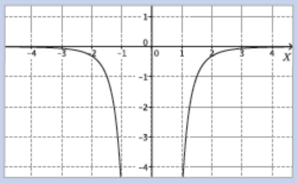


  Acá identificamos que la función abarca tanto a la izquierda como a la derecha del eje Y, tocando el eje ; como también abarca abajo y arriba del eje X, tocando el eje. Por lo tanto, su dominio y recorrido queda representado de la siguiente manera:

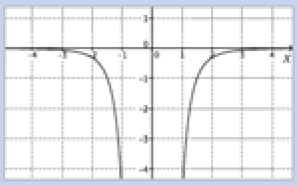
  $Dom\ f = Rec\ f = R\ (todos\ los\ reales)$

- $f(x) = -\frac{3}{5}x^{-4} \longrightarrow$ Primero identificamos los valores de a y n.
  $a = -\frac{3}{5}(negativo)$ y $n = -4\ (negativo\ y\ par)$

Luego observamos en el resumen correspondiente, el cual debe ser donde tengamos a $n\ negativo$:

	$a > 0$	$a < 0$
n negativo impar		
n negativo par		

Posteriormente identificamos en cuál de las 4 opciones se cumplen los requisitos según nuestros valores de a y n, que en este caso sería:

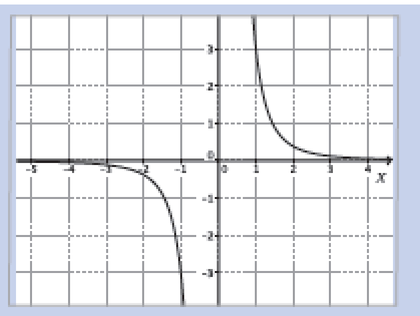
	$a < 0$
n negativo par	

Acá identificamos que la función abarca a la izquierda y derecha del eje Y, sin tocarlo, y también que abarca solo la parte bajo el eje X, sin tocarlo. Por lo tanto, su dominio y recorrido queda representado de la siguiente manera:

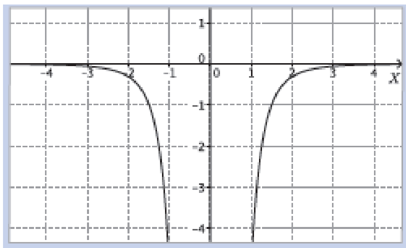
Su $Dom\ f = R - \{0\}\ (todos\ los\ reales\ menos\ el\ cero)$
$Su\ Rec\ f =\ R^{-} - \{0\}\ (todos\ los\ reales\ negativos\ menos\ el\ cero)$ pues:

Actividad 2

Identificar los posibles valores que pueden tener las variables a y n en una función $f(x) = ax^n$ dados los siguientes gráficos:

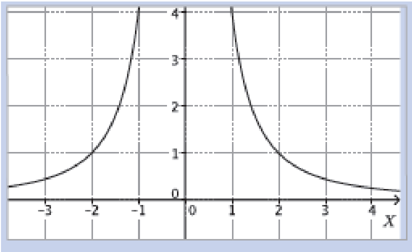
A) 

$a =$ _____
$n =$_____

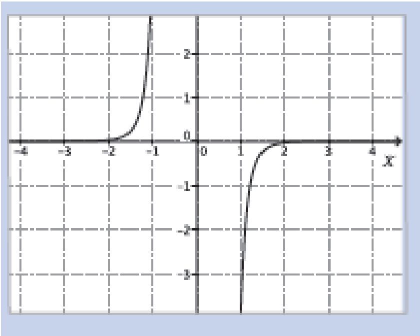
B) 

$a =$ _____
$n =$_____

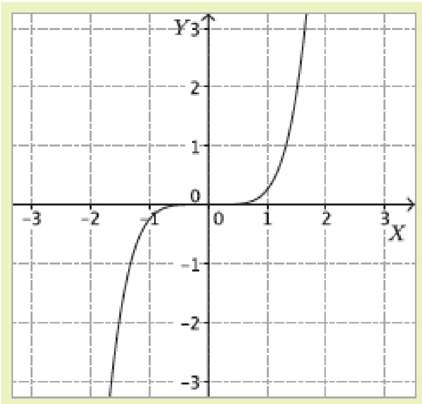
LICEO POLITÉCNICO
EMA ESPINOZA CORREA
LAUTARO

C) 

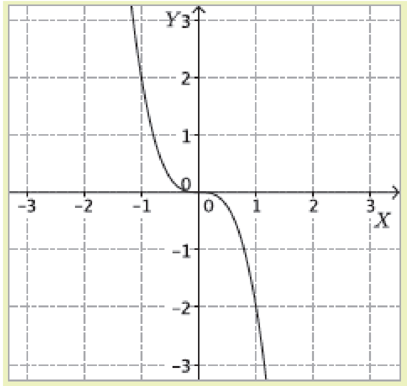
$a =$ _____
$n =$_____

D) 

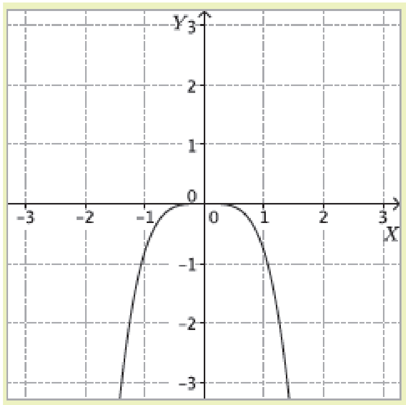
$a =$ _____
$n =$_____

E) 

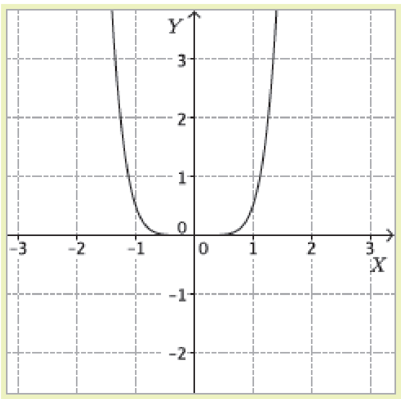
$a =$ _____
$n =$_____

F) 

$a =$ _____
$n =$_____

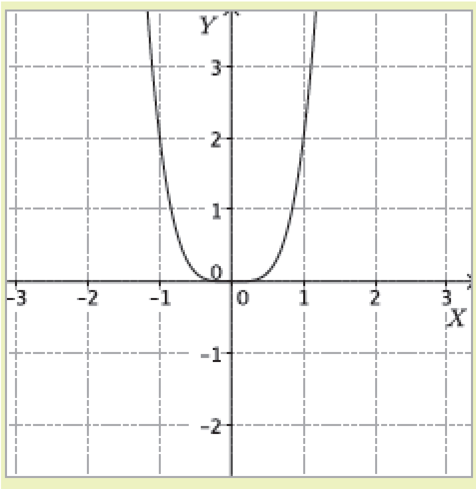
G) 

$a =$ _____
$n =$_____

H) 

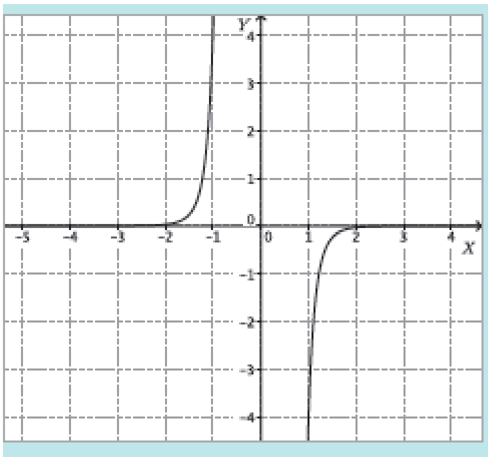
$a =$ _____
$n =$_____

Ejemplo: Identificar los posibles valores que pueden tener las variables a y n en una función $f(x) = ax^n$ dados los siguientes gráficos:

- 

  Primero identificamos como es el dominio y recorrido de la función, si observamos la gráfica, nos damos cuenta que la función abarca a la izquierda y derecha del eje Y, a su vez toca el eje X y abarca la parte de arriba de esta misma. Así, podemos confirmar que:

  $a = numero\ positivo$ y $n = numero\ positivo\ par$, por lo tanto puede tomar cualquier valor que cumpla con esas condiciones.

- 

  Primero identificamos como es el dominio y recorrido de la función, si observamos la gráfica, nos damos cuenta que la función abarca la izquierda y derecha del eje Y sin tocarla, a su vez identificamos que abarca tanto arriba como abajo del eje X sin tocarla, además nos podemos dar cuenta que la gráfica es creciente (de izquierda a derecha sube) en todo su recorrido (exceptuando a $x = 0$, donde es asíntota vertical) . Así, podemos confirmar que:

  $a = numero\ negativo$ y $n = numero\ negativo\ impar$, por lo tanto puede tomar cualquier valor que cumpla con esas condiciones.

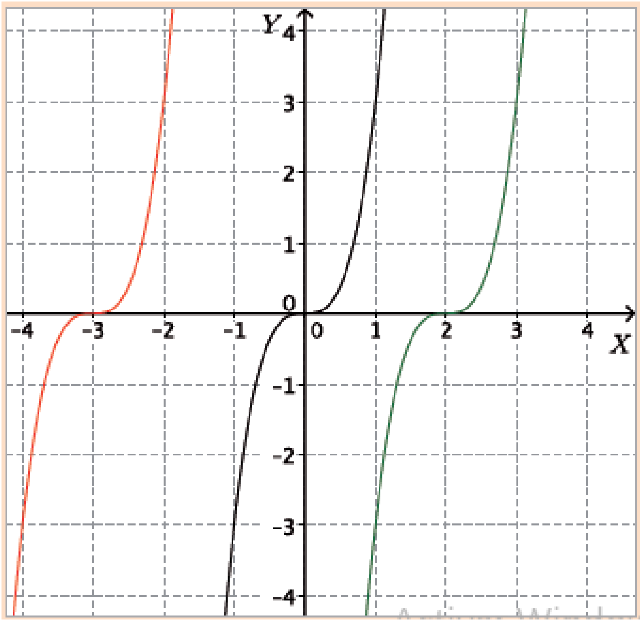
LICEO POLITÉCNICO
EMA ESPINOZA CORREA
LAUTARO

Traslaciones horizontales y verticales

En el curso anterior aprendiste que la gráfica de una función cuadrática se puede trasladar hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo. Con la gráfica de una función potencia puedes hacer lo mismo.

La figura muestra las gráficas de las siguientes funciones.

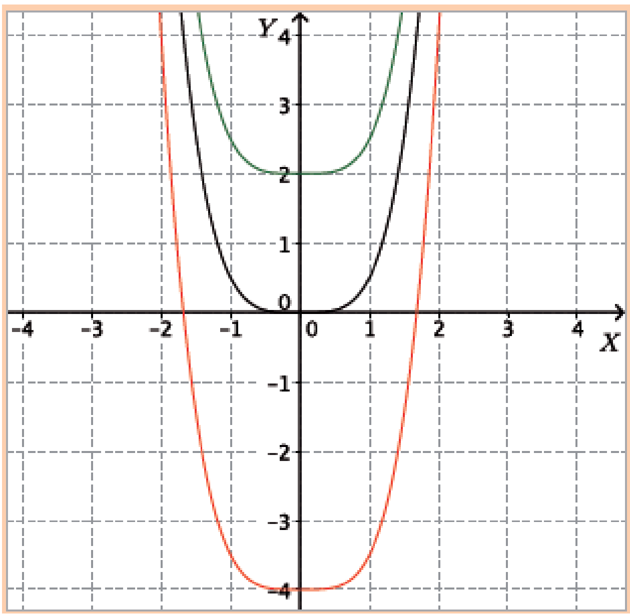
$f(x) = 3x^3$, $g(x) = 3(x+3)^3$, $h(x) = 3(x-2)^3$



Observa que la forma de la gráfica de las tres funciones es la misma, solo se diferencian en que están trasladadas horizontalmente. Si te fijas en el eje X, la gráfica de f pasa justo por el origen. La gráfica de g interseca al eje X en el punto $(-3, 0)$, es decir, está trasladada 3 unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de f. Finalmente, la gráfica de h interseca al eje X en el punto $(2, 0)$. Por lo tanto, se encuentra trasladada 2 unidades a la derecha respecto de la gráfica de f. Luego, podemos concluir que si c es un número positivo, la gráfica de la función $f(x) = a(x+c)^n$ está trasladada c unidades a la izquierda respecto de $f(x) = ax^n$ y la gráfica *de* $f(x) = a(x-c)^n$ está trasladada c unidades a la derecha respecto de $f(x) = ax^n$.

En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones:

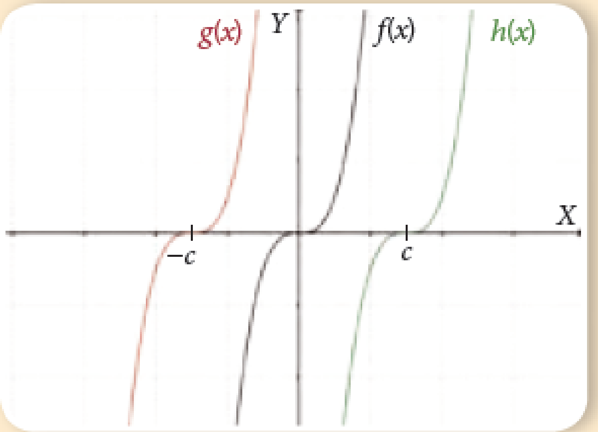
$f(x) = \frac{1}{2}x^4$, $g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4$

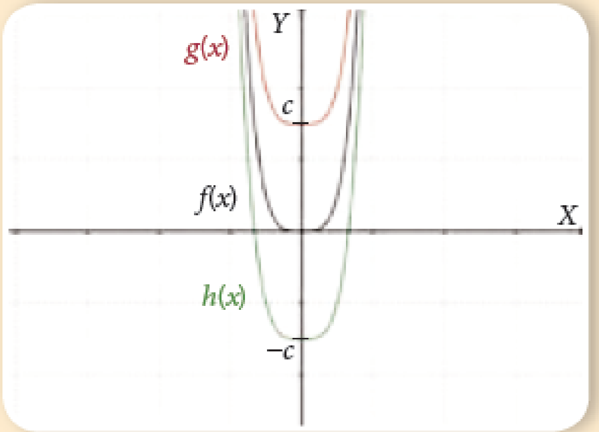


Observa que las gráficas de las funciones g y h están trasladadas verticalmente respecto de la gráfica de f. En el caso de g, su gráfica está trasladada 2 unidades arriba de la de f. Por otra parte, la gráfica de h está trasladada 4 unidades abajo de la gráfica de f. Por lo tanto, podemos concluir que si c es un número positivo, la gráfica de la función $f(x) = ax^n + c$ está trasladada c unidades hacia arriba respecto de $f(x) = ax^n$ y la gráfica de la función $f(x) = ax^n - c$ está trasladada c unidades hacia abajo respecto de $f(x) = ax^n$.

En resumen:

- Sea $f(x) = ax^n$ y sea c un número positivo:
  - La gráfica de $g(x) = a(x + c)^n$ se traslada en c unidades hacia la izquierda con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $h(x) = a(x - c)^n$ se traslada en c unidades hacia la derecha con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $g(x) = ax^n + c$ se traslada en c unidades hacia arriba con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $h(x) = ax^n - c$ se traslada en c unidades hacia abajo con respecto a $f(x)$.





Actividad 3

A partir de la gráfica de la función $g(x) = x^5$, dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a. $f(x) = -x^5$

b. $h(x) = x^5 + 1$

c. $h(x) = (x - 2)^5$

d. $q(x) = (x + 1)^5 - 2$

Ejemplo: a partir de la gráfica de la función $f(x) = 2x^4$, dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2x^4 - 2$

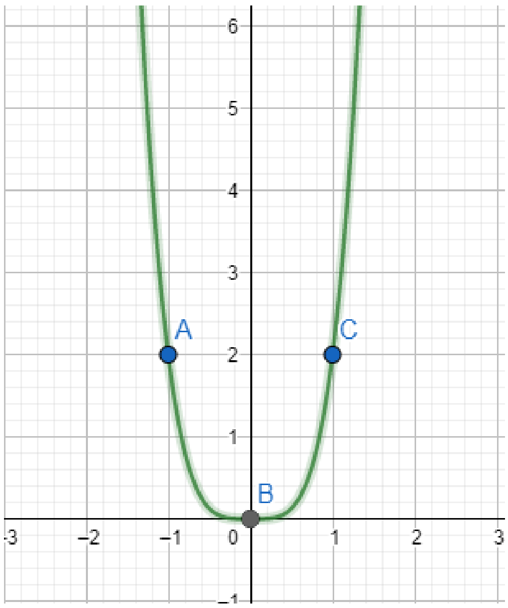
Primero debemos hacer la gráfica de la función original, para ello confeccionamos la tabla de doble entrada donde le daremos los siguientes valores a $x = -1, 0, 1$. (recuerda que le puedes dar cualquier valor a x, pero en este caso daremos valores pequeños para no obtener resultados muy grandes)

x	$f(x) = 2x^4$	(x, y)
-1	$2 \cdot (-1)^4 = 2 \cdot 1 = 2$	$(-1,2)$
0	$2 \cdot (0)^4 = 2 \cdot 0 = 0$	$(0,0)$
1	$2 \cdot (1)^4 = 2 \cdot 1 = 2$	$(1,2)$

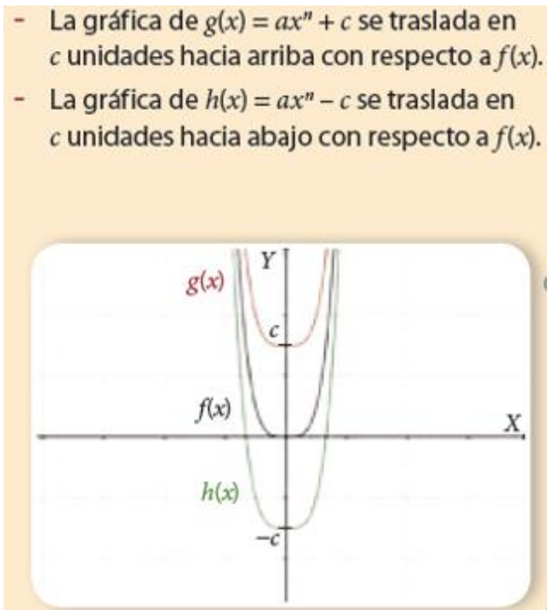
Una vez confeccionada la tabla, procedemos a ubicar los puntos obtenidos en un plano cartesiano, recuerda que los puntos que se obtienen en el plano cartesiano están dados por los resultados obtenidos en la última columna, en este caso:

(x,y)	
$(-1,2)$	*A*
$(0,0)$	*B*
$(1,2)$	*C*

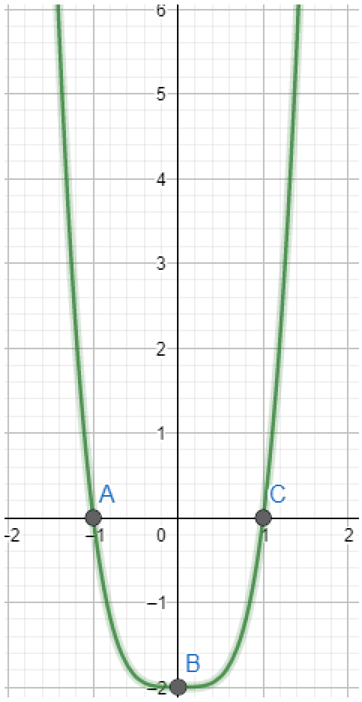
Obtenemos la siguiente gráfica, la cual corresponde a algunos puntos de la función $f(x) = 2x^4$:



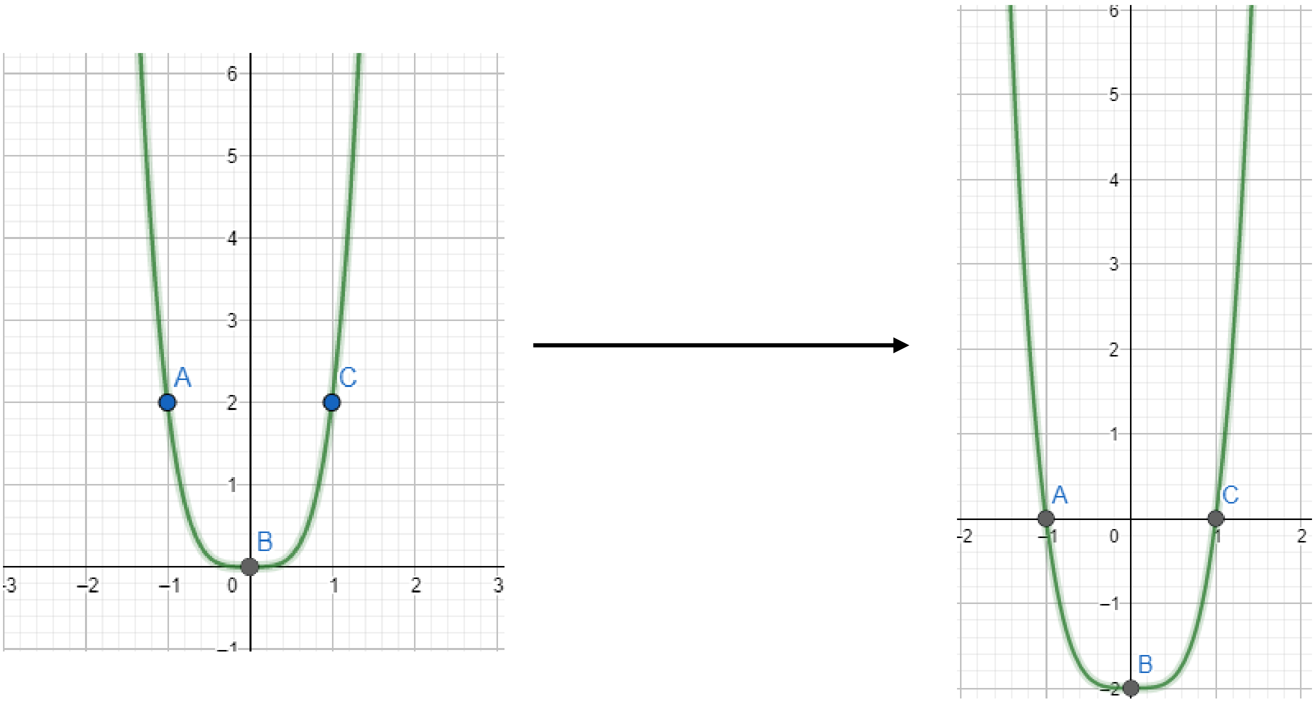
Posteriormente identificamos que tipo de traslación se le hizo a la gráfica original, la que en este caso es de la forma $f(x) = 2x^4 - 2$, donde nuestro $c = -2$ $(traslacion\ vertical)$, por lo tanto nuestra grafica original se tendrá que trasladar 2 unidades hacia abajo, es decir, cada punto de la función original se mueve 2 espacios hacia abajo.



Aplicando lo anterior obtenemos el siguiente grafico para la función $f(x) = 2x^4 - 2$:



Donde puedes observar que la gráfica se trasladó 2 unidades hacia abajo en cada punto con respecto a la original.



b. $f(x) = 2(x+1)^4 + 3$

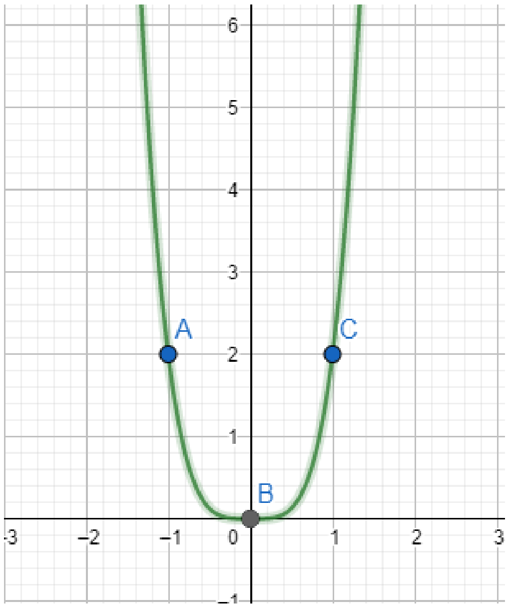
Primero debemos hacer la gráfica de la función original, para ello confeccionamos la tabla de doble entrada donde le daremos los siguientes valores a $x = -1, 0, 1$. (recuerda que le puedes dar cualquier valor a x, pero en este caso daremos valores pequeños para no obtener resultados muy grandes)

x	$f(x) = 2x^4$	(x, y)
-1	$2 \cdot (-1)^4 = 2 \cdot 1 = 2$	$(-1,2)$
0	$2 \cdot (0)^4 = 2 \cdot 0 = 0$	$(0,0)$
1	$2 \cdot (1)^4 = 2 \cdot 1 = 2$	$(1,2)$

Una vez confeccionada la tabla, procedemos a ubicar los puntos obtenidos en un plano cartesiano, recuerda que los puntos que se obtienen en el plano cartesiano están dados por los resultados obtenidos en la última columna, en este caso:

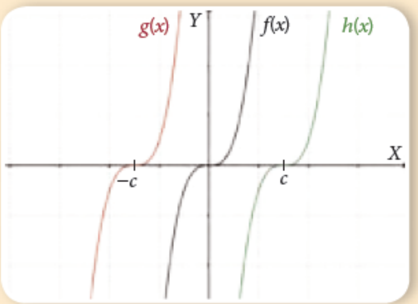
(x, y)	
$(-1,2)$	*A*
$(0,0)$	*B*
$(1,2)$	*C*

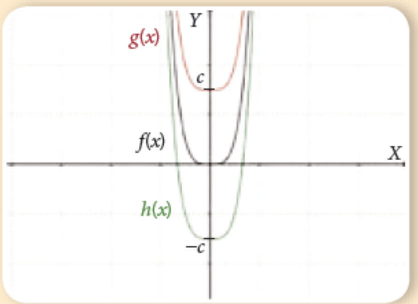
Obtenemos la siguiente gráfica, la cual corresponde a algunos puntos de la función $f(x) = 2x^4$:



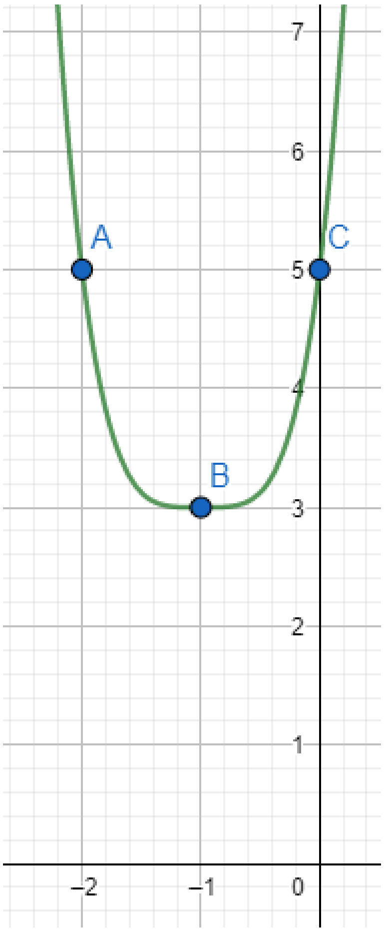
Posteriormente identificamos que tipo de traslación se le hizo a la gráfica original, la que en este caso es de la forma $f(x) = 2(x+1)^4 + 3$, donde nuestro $c_1 = +1$ $(traslacion\ horizontal)$ y $c_2 = +3$ $(traslacion\ vertical)$, por lo tanto nuestra grafica original se tendrá que trasladar 1 unidad hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba.

- Sea $f(x) = ax^n$ y sea c un número positivo:
  - La gráfica de $g(x) = a(x + c)^n$ se traslada en c unidades hacia la izquierda con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $h(x) = a(x - c)^n$ se traslada en c unidades hacia la derecha con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $g(x) = ax^n + c$ se traslada en c unidades hacia arriba con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $h(x) = ax^n - c$ se traslada en c unidades hacia abajo con respecto a $f(x)$.





Aplicando lo anterior obtenemos el siguiente grafico para la función $f(x) = 2(x+1)^4 + 3$:



Donde puedes observar que la gráfica se trasladó 1 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba en cada punto con respecto a la original.